Διάλεξη 10η : Πέμπτη 12 Μάη 2016, 6-9 μ.μ.

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

ΘΕΜΑ: Εξισώσεις Fredholm

$$y(t) = f(t) + \int_a^b K(t,u)f(u,y(u))du, \quad t \in [a,b].$$

Παρατηρήσεις.

- Αναγωγή προβλήματος συνοριακών τιμών σε εξίσωση Fredholm
- Μία εξίσωση Fredholm δεν ανάγεται πάντα σε διαφορική εξίσωση. Παράδειγμα.
- Παραγώγιση εξίσωσης Fredholm (ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις).

1. Η ομογενής γραμμική εξίσωση με διαχωρίσιμο πυρήνα: ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις

$$y(t) = \lambda \int_a^b a_1(t)b_1(u)y(u)du, \quad t \geq 0.$$

$$y(t) = \lambda \int_a^b [a_1(t)b_1(u) + a_2(t)b_2(u)]y(u)du, \quad t \geq 0.$$

- Αν $D(\lambda) \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει μόνον την μηδενική λύση.
- Αν $D(\lambda) = 0$ τότε οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης (ιδιοσυναρτήσεις) προκύπτουν από την επίλυση του αλγεβρικού συστήματος για κάθε ιδιοτιμή ξεχωριστά.

Παραδείγματα. (3)

2. Η μη ομογενής γραμμική εξίσωση με διαχωρίσιμο πυρήνα

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b a_1(t)b_1(u)y(u)du, \quad t \geq 0.$$

Για $c = \int_a^b b_1(u)y(u)du$ είναι

$$c[1 - \lambda \int_a^b a_1(u)b_1(u)du] = \int_a^b f(s)b_1(s)ds$$

- Αν $\int_a^b a_1(u)b_1(u)du = 0$ τότε $c = \int_a^b f(u)b_1(u)du$ και

$$y(t) = f(t) + \lambda c a_1(t).$$

- Αν $\int_a^b a_1(u)b_1(u)du \neq 0$ και $\lambda \neq [\int_a^b a_1(u)b_1(u)du]^{-1}$ τότε

$$c = \frac{\int_a^b f(u)b_1(u)du}{1 - \lambda \int_a^b a_1(u)b_1(u)du}$$

  και

$$y(t) = f(t) + \lambda c a_1(t).$$

- Για $\int_a^b a_1(u)b_1(u)du \neq 0$ και $\lambda := \lambda_0[\int_a^b a_1(u)b_1(u)du]^{-1}$:
  - Αν $\int_a^b f(u)b_1(u)du \neq 0$ τότε δεν υπάρχει λύση
  - Αν $\int_a^b f(u)b_1(u)du = 0$ τότε

$$y(t) = f(t) + cy_0(t)$$

    με y_0 την ιδιοσυνάρτηση της ιδιοτιμής

Παραδείγματα

$$y(t) = b + \lambda \int_0^1 y^2(s)ds, \quad y(t) = t + \lambda t \int_{-1}^1 s^2 y(s)ds$$

2β. Η μη ομογενής γραμμική εξίσωση με διαχωρίσιμο πυρήνα

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b [a_1(t)b_1(u) + a_2(t)b_2(u)]y(u)du, \quad t \geq 0.$$

Βρίσκουμε

$$c_1(1 - \lambda a_{11}) - c_2 \lambda a_{12} = f_1$$
$$c_1 \lambda a_{21} + c_2(1 - \lambda a_{22}) = f_2$$

- Αν η ορίζουσα $D(\lambda)$ του συστήματος είναι μη μηδενική, τότε η εξίσωση δέχεται ακριβώς μία λύση

$$y(t) = f(t) + \lambda c_1 a_1(t) + \lambda c_2 a_2(t)$$

- Για συμμετρικούς πυρήνες και τις τιμές του λ που η ορίζουσα μηδενίζεται (ιδιοτιμές), η εξίσωση έχει λύση αν και μόνον αν

$$\int_a^b f(s)\phi_i(s)ds = 0, \quad i = 1, 2$$

Για καθε ιδιοτιμή λ_i ξεχωριστά

- Βρισκουμε την ιδιοσυνάρτηση ϕ_i και εξετάζουμε άν ισχύει η σχέση

$$\int_a^b f(s)\phi_i(s)ds = 0, \quad i = 1, 2$$

- Λύνουμε το σύστημα για την συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ_i και βρίσκουμε τις τιμές των c_i.
- Η λύση δίνεται από τον τύπο

$$y(t) = f(t) + \lambda_i c_1^i a_2(t) + \lambda_i c_2^i a_2(t)$$

Παραδείγματα (3)